УДК 514.76

Н.А. Осьминина, А.Я. Султанов
Пензенский государственный университет
cekosm@rambler.ru, sultanovaya@rambler.ru

Горизонтальные лифты функций с многообразия в его касательное расслоение второго порядка и их применения

Показано, что задание линейной связности на базе M касательного расслоения второго порядка $T_2(M)$ позволяет на $T_2(M)$ построить атлас суммы Уитни $T(M)\oplus T(M)$ двух экземпляров касательного расслоения $T(M)$ первого порядка. Использование этого атласа значительно упрощает многие вычисления.

Ключевые слова: горизонтальный лифт, касательное расслоение второго порядка, атлас суммы Уитни.

1. Основные понятия и факты. Пусть M — n-мерное вещественное гладкое многообразие класса C^∞, $(T_2(M),\ \pi,\ M)$ — касательное расслоение второго порядка над M. На тотальном пространстве этого расслоения существует структура гладкого многообразия класса C^∞, порожденная гладкой структурой многообразия M [1].

Каноническая проекция $\pi\colon T_2(M) \to M$ позволяет для каждой функции f, заданной на M, определить функцию $f_{(0)}=f\cdot\pi$ на $T_2(M)$, называемую вертикальным лифтом функции f. Выберем произвольную карту (U, x^i) гладкого многообразия M. Обозначим через x^i_α $(\alpha = 0,1,2)$ естественные координатные функции на $\pi^{-1}(U)$. Тогда для каждой функции f класса C^∞, заданной на M, можно построить ее естественные лифты $f_{(\alpha)}$ $(\alpha = 0,1,2)$:

$$f_{(0)} = f \cdot \pi,\ f_1 = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j,$$
$$f_2 = (\partial_j f)_{(0)} x_2^j + \frac{1}{2}(\partial_{jk} f)_{(0)} x_1^j x_1^k. \qquad (1)$$

Эти формулы позволяют получить формулы перехода от одной системы координат к другой. Предположим, что $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(\overline{U}) \neq \varnothing$ и координатные функции на $U \cap \overline{U}$ связаны соотношениями $\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, x^2, ..., x^n)$. Тогда на основании формул (1) получим следующие формулы, связывающие координатные функции x_α^i и $\overline{x}_\alpha^i$ на $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(\overline{U})$:

$$\overline{x}_0^i = (\overline{x}^i)_{(0)},\ \overline{x}_1^i = (\partial_j \overline{x}^i)_{(0)} x_1^j,$$
$$\overline{x}_2^i = (\partial_j \overline{x}^i)_{(0)} x_2^j + \tfrac{1}{2}(\partial_{jk} \overline{x}^i)_{(0)} x_1^j x_1^k. \qquad (2)$$

Матрица Якоби $\widetilde{J} = \left(\dfrac{\partial \overline{x}_\alpha^i}{\partial x_\beta^i}\right)$ $(i, j = 1, 2, ..., n; \alpha, \beta = 0, 1, 2)$ имеет следующее блочное строение: $\overline{J} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ * & J & 0 \\ * & * & J \end{pmatrix}$, где $J = \left(\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial x^j}\right)_{(0)}\right)$. Поэтому $\det \overline{J} \neq 0$.

Из второй группы формул системы (2) следует, что для каждого тензорного поля ω типа (0, r) объект $\gamma^r \omega$, определяемый соотношением

$$\gamma^r \omega = (\omega_{i_1 i_2 ... i_r})_{(0)} x_1^{i_1} x_1^{i_2} ... x_1^{i_r},$$

является скаляром, то есть функцией на $T_2(M)$ со значениями в $\mathbb{R}$.

2. Горизонтальные лифты функций с базы М в касательное расслоение второго порядка *$T_2(M)$*. Предположим, что на многообразии М задана линейная связность, компонентами которой в карте (U,x^i) являются функции Γ^i_{jk}. Для каждой гладкой функции f ее дифференциал $df = \partial_j f dx^j$ является 1-формой. В последнем равенстве системы (1) выразим частные производные $\partial_{jk} f = \partial_k(\partial_j f)$ через ковариантные производные $\nabla_k(\partial_j f)$ по формулам

$$\partial_k(\partial_j f) = \nabla_k(\partial_j f) + \Gamma^i_{kj}\partial_i f \ .$$

Тогда получим

$$f_{(2)} = (\partial_i f)_{(0)}(x^i_2 + \tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{kj})_{(0)} x^k_1 x^j_1) + \tfrac{1}{2}(\nabla_k(\partial_j f))_{(0)} x^k_1 x^j_1 .$$

Так как функции $\nabla_k(\partial_j f)$ являются составляющими тензорного поля ∇df типа (0, 2), то

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}(\nabla_k(\partial_j f))_{(0)} x^k_1 x^j_1) = \gamma^2(\nabla df)$$

является функцией. Следовательно, разность

$$f_{(2)} - \gamma^2(\nabla df) = (\partial_i f)_{(0)}(x^i_2 + \tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{kj})_{(0)} x^k_1 x^j_1)$$

также будет функцией. Эту функцию обозначим символом $f_{[2]}$. Таким образом, $f_{[2]} = f_{(2)} - \gamma^2(\nabla df)$, что в координатах имеет вид

$$f_{[2]} = (\partial_i f)_{(0)}(x^i_2 + \tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{kj})_{(0)} x^k_1 x^j_1) . \qquad (3)$$

Определение. Функция $f_{[2]} = f_{(2)} - \gamma^2(\nabla df)$ называется *горизонтальным лифтом функции* f с многообразием M в касательное расслоение $T_2(M)$ второго порядка.

Поскольку $f_{[2]}$ — скалярное поле, то при переходе к новой системе координат $\bar{x}^i_\alpha$ $(\alpha = 0,1,2)$ получим равенство

$$\left(\partial_i f\right)_{(0)}\left(\overline{x}_2^i+\tfrac{1}{2}\left((\overline{\Gamma}_{kj}^i)_{(0)}\overline{x}_1^k\overline{x}_1^j\right)=\left(\partial_i f\right)_{(0)}\left(x_2^i\right)+\tfrac{1}{2}\left(\Gamma_{kj}^i\right)_{(0)}x_1^k x_1^j\right). \quad (4)$$

В левой части этого равенства частные производные $\partial_i f$ берутся по переменным $\overline{x}^i$. Если в равенстве (3) положим вместо функции f координатные функции x^i, то получим

$$(x^i)_{[2]}=x_2^i+\tfrac{1}{2}(\Gamma_{kj}^i)_{(0)}x_1^k x_1^j .$$

Введем следующее обозначение: $(x^i)_{[2]}=x_{[2]}^i$. Из формулы (4) следуют равенства

$$(\overline{x}^i)_{[2]}=(\partial_j\overline{x}^i)_{(0)}x^j{}_{[2]}. \quad (5)$$

Используя полученные в этом пункте результаты построим на $T_2(M)$ атлас суммы Уитни двух касательных расслоений над M.

3. Атлас суммы Уитни на $T_2(M)$. Пусть $T_2(M)$ — касательное расслоение второго порядка над гладким многообразием M, и ∇ — линейная связность, заданная на M. В каждой координатной окрестности $(\pi^{-1}(U),x_\alpha^i)$ $(\alpha=0,1,2)$ введем функции $\overline{x}_\alpha^i$ $(\alpha=0,1,2)$ по формулам

$$x_{[0]}^i=x_0^i,\ x_{[1]}^i=x_1^i,\ x_{[2]}^i=x_2^i+\tfrac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i)_{(0)}x_1^j x_1^k. \quad (6)$$

Матрица Якоби $J=\left(\dfrac{\partial x_{[\alpha]}^i}{\partial x_\beta^j}\right)$ $(\alpha,\beta=0,1,2)$ имеет следующее блочное строение:

$$J=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ A & B & I\end{pmatrix},$$

где J — единичная матрица порядка n, а матрицы A и B — квадратные порядка n, причем

$$A=\left(\tfrac{1}{2}\left(\partial_j \Gamma^i_{st}\right)_{(0)} x_1^s x_1^t\right),\ B=\left(\left(\partial_j \dot{\Gamma}^i_{jk}\right)_{(0)} x_1^k\right),$$

где $\dot{\Gamma}^i_{jk}=\frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{kj})$. Структура матрицы J показывает, что $\det J \neq 0$, следовательно, функции $x^i_{[\alpha]}$ $(\alpha=0{,}1{,}2)$ могут быть приняты за координатные функции на $\pi^{-1}(U)$. Тогда совокупность всевозможных окрестностей $(\pi^{-1}(U), x^i_{[\alpha]})$ будет составлять атлас многообразия $T_2(M)$. Пусть $(\pi^{-1}(\overline{U}), \overline{x}^i_{[\alpha]})$ — другая координатная окрестность и $\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(\overline{U})\neq\varnothing$. Тогда из определения функций и формул (2) и (5) получим, что

$$\overline{x}^i_{[0]}=\overline{x}^i_{[0]}(x^1_{[0]},\ldots,x^n_{[0]}),\ \overline{x}^i_{[1]}=(\partial_j\overline{x}^i)_{(0)}x^i_{[1]},\ \overline{x}^i_{[2]}=(\partial_j\overline{x}^i)_{(0)}x^i_{[2]}. \quad (7)$$

На основании формул (7) заключаем, что атлас, состоящий из всевозможных карт $(\pi^{-1}(U), x^i_{[\alpha]})$, где U — всевозможные окрестности карт гладкого атласа многообразия *M*, является атласом суммы Уитни *T(M)* $\oplus$ *T(M)* двух экземпляров касательного расслоения *T(M)*.

Используя формулы (6), найдем связи между дифференциалами $dx^i_{[\alpha]}$ и dx^i_α:

$$dx^i_{[0]}=dx^i_0,\ dx^i_{[1]}=dx^i_1,\ dx^i_{[2]}=dx^i_2+\tfrac{1}{2}(\partial_l\Gamma^i_{jk})_{(0)}x_1^j x_1^k dx_0^l+$$
$$+\tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{jk})_{(0)}x_1^j dx_1^k+\tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{jk})_{(0)}x_1^k dx_1^j.$$

Обозначим через $\partial_s^\alpha, \partial_s^{[\alpha]}$ операторы частного дифференцирования по x^s_α и $x^s_{[\alpha]}$ соответственно.

Рассмотрим разложения $\partial_s^{[\alpha]}=A^{\alpha h}_{\beta s}\partial_h^\beta$ $(\alpha,\beta=0{,}1{,}2$, по β ведется суммирование), где $A^{\alpha h}_{\beta s}$ — неизвестные коэффициенты. Для определения этих коэффициентов воспользуемся соотношениями $dx^i_{[\alpha]}(\partial_s^{[\beta]})=\delta^\beta_\alpha\delta^i_s$. В результате найдем

$$\partial_s^{[0]} = \partial_s^0 - \tfrac{1}{2}(\partial_s \Gamma^i_{jk})_{(0)} x_1^j x_1^k \partial_i^2, \ \partial_s^{[2]} = \partial_s^2,$$
$$\partial_s^{[1]} = \partial_s^1 - \tfrac{1}{2}(\partial_s \Gamma^i_{jk})_{(0)} (\delta_s^j x_1^k + \delta_s^k x_1^j)\partial_i^2. \qquad (8)$$

Эти равенства будем использовать при получении связей между горизонтальными лифтами векторных полей *T₂(M)*.

4. Связь между горизонтальными лифтами векторных полей на *$T_2(M)$*. В пункте 2 мы показали, что задание линейной связности на *M* позволяет для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ определить ее горизонтальный лифт $f_{[2]} \in C^\infty((T_2M))$ и построить атлас суммы Уитни на $T_2(M)$. Используя этот атлас для каждого векторного поля *X*, заданного на *M*, можно на расслоении $T_2(M)$ определить горизонтальные лифты-X^{h_α} $(\alpha = 0,1,2,[2])$. Полный горизонтальный лифт X^{h_0}, который обозначим через X^h, определим в локальных координатах, равенством

$$X^h = (X^i)_{[0]}(\partial_i^{[0]} - (\Gamma^j_{ik})_{[0]} x^k_{[\sigma]} \partial_j^{[\sigma]} \quad (\sigma = 1, 2).$$

Другие горизонтальные лифты X^{h_σ} векторного поля $x = x^i \partial_i$ определяются условиями

$$X^{h_\sigma} = (X^i)_{[0]} \partial_i^{[\sigma]} \quad (\sigma = 1, 2).$$

Используя естественный атлас на *$T_2(M)$,* можно определить полный горизонтальный лифт $X^{H_0} = X^H$ векторного поля *X* следующим равенством [3]:

$$X^H = (X^i)_{(0)}(\partial_i^0 - (\Gamma^k_{ij})_{(0)} x_1^j \partial_k^1 -$$
$$-((\Gamma^k_{ij})_{(0)} x_2^j + \tfrac{1}{2}(\partial_j \Gamma^k_{is} - \Gamma^t_{ij}\Gamma^k_{ts})_{(0)} x_1^j x_1^s)\partial_k^2).$$

Неполные горизонтальные лифты задаются равенствами

$$X^{H_1} = (X^i)_{(0)}(\partial_i^1 - (\Gamma^k_{ij})_{(0)} x_1^j \partial_k^2), \quad X^{H_2} = (X^i)_{(0)} \partial_i^2.$$

Используя формулы (8), можно найти связь между X^{h_α} и X^{H_α} $(\alpha = 0,1,2)$. Векторные поля X^h и X^H связаны соотношением

$$X^h = X^H - \tfrac{1}{2}\gamma(R(X,\cdot)),$$

где R — тензорное поле кривизны связности ∇, его компоненты R^i_{ljk} определены условиями $R^i_{ljk}\partial_i = R(\partial_j \partial_k)\partial_l$ и выражаются через коэффициенты Γ^i_{lk} связности ∇ формулами

$$R^i_{ljk} = \partial_j \Gamma^i_{kl} - \partial_k \Gamma^i_{jl} + \Gamma^s_{kl}\Gamma^i_{js} - \Gamma^t_{jl}\Gamma^i_{kt}.$$

Векторное поле $\gamma(R(X,\cdot))$ задано на *T₂(M)* и имеет следующее координатное представление:

$$\gamma(R(X,\cdot)) = (X^i R^k_{sij})_{(0)} x^s_1 x^j_1 \partial^2_k.$$

Векторные поля X^{h_1} и X^{H_1} связаны равенством

$$X^{h_1} = X^{H_1} \tfrac{1}{2}\gamma_1(T(X,\cdot)),$$

где T — тензорное поле кручения связности ∇, а векторное поле $\gamma_1(T(X,\cdot))$ на $T_2(M)$ определяется условием

$$\gamma_1(T(X,\cdot)) = (X^i T^k_{ij})_{(0)} x^j_1 \partial^2_k.$$

Векторные поля X^{h_2} и X^{H_2} совпадают.

С помощью горизонтальных лифтов векторных полей специальные лифты тензорного поля типа (1,1) введенные в [4], можно представить следующим образом:

$$K^{H_\alpha \gamma_1} = (K^i_j)_{(0)} x^j_{[1]} (\partial_i)^{H_\alpha}, \quad K^{H_\alpha \gamma_2} = (K^i_j)_{(0)} x^j_{[2]} (\partial_i)^{H_\alpha}.$$

Список литературы

1. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles. Differential geometry. N. Y., 1973.

2. *Султанов А.Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования в расслоениях Вейля первого порядка со связностью горизонтального лифта // Движения в обобщенных пространствах : сб. Пенза, 1999. С. 142—149.

3. *Султанов А.Я.* Продолжение римановых метрик из базы в расслоение струй второго порядка дифференцируемых отображений : матер. Междунар. геометрической школы-семинара памяти Н.В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 24 сентября — 4 октября 1996 г. Ростов н/Д, 1996. С. 26.

4. *Осьминина Н.А.* О некоторых лифтах касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта // Движения в обобщенных пространствах : сб. Пенза, 1999. С. 107—120.

N. Osminina, A. Sultanov

Horizontal lifts of functions from a manifold to its tangent bundle of the second order and their applications

It is shown that the imposing of a linear connection on the base M of the second order the tangent bundle $T_2(M)$ allows to build on $T_2(M)$ an atlas of Whitney sum $T(M) \oplus T(M)$ of two copies of the first order tangent bundle $T(M)$. Using this atlas simplifies many calculations.

УДК 514.76

К.В. Полякова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
polyakova_@mail.ru

О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков

Для задания аффинной связности 2-го порядка рассматриваются следующие векторнозначные формы: каноническая форма 1-го порядка расслоения реперов 2-го порядка на мно-